

**Métodos Numéricos**  
24 de julio de 2020  
**Recuperatorio**  
**Primer Parcial**



**DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION**  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

<input type="checkbox"/> Completar apellido en las hojas y numerarlas <input type="checkbox"/> Enviar fotos claras y legibles de la resolución del examen <input type="checkbox"/> <b>Justificar <u>todas</u> las respuestas</b>	Nombre y Apellido <i>Yulita Federico</i>			
	Ej. 1 <i>25</i>	Ej. 2 <i>30</i>	Ej. 3 <i>30</i>	Nota <i>85</i> <b>A</b>

1. Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible,  $v, w \in \mathbb{R}^n$  y  $d \in \mathbb{R}$ . Definimos  $B \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  como  $B = \begin{pmatrix} A & v \\ w^t & d \end{pmatrix}$ . Sea  $x_v \in \mathbb{R}^n$  la solución de  $Ax = v$ .

(a) Probar que  $B$  es inversible si y sólo si  $d - w^t x_v \neq 0$ . (15 puntos)

(b) Supongamos que  $B$  es inversible. Sean  $b \in \mathbb{R}^n$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Notamos  $x_b$  al vector de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $Ax_b = b$ . Mostrar que la solución de  $Bx = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$  está dada por  $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$  con  $y = x_b - z x_v$  y  $z = \frac{c - w^t x_b}{d - w^t x_v}$ . (20 puntos)

2. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrando o dando un contraejemplo: (15 puntos cada ítem)

(a) La matriz  $\begin{pmatrix} aI & aP \\ -aP^t & aI \end{pmatrix}$  es definida positiva para todo  $a \in \mathbb{R}$  no nulo, siendo  $I$  la matriz identidad y  $P$  una matriz de permutación, ambas de  $n \times n$ .

(b) Sea  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \neq 0$  y  $A = uu^t$ . Si  $B(t) = (1 - t)I + tA^t A$ , entonces  $B(t)$  es definida positiva para todo  $0 \leq t \leq 1$ .

3. Se define la matriz  $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para cualquier  $n$  potencia de 2, de forma inductiva de la siguiente manera:

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{n/2} & H_{n/2} \\ H_{n/2} & -H_{n/2} \end{pmatrix}$$

siendo  $H_1 = [1]$ .

(a) Probar que la matriz  $H_n$  es ortogonal para cualquier  $n$  potencia de 2. (15 puntos)

(b) Determinar si  $H_2$  es una matriz de Givens, una matriz de Householder, o ninguna de las anteriores. Justificar en cada caso, especificando qué rotación se realiza si es de Givens, o respecto de qué recta refleja si es de Householder. (20 puntos)

FEDERICO YULITA  
351/17

(1)

3) (A) De (B) Hago el inciso (B) primero porque el (A) está difícil.  
Basta con probar haciendo la cuenta:

$$BX = \begin{pmatrix} A & N \\ W^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay + zN \\ W^T y + zd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

Usemos que  $\begin{cases} y = x_b - z x_N \\ z = \frac{c - W^T x_b}{d - W^T x_N} \end{cases}$ :

$$Ay + zN = A(x_b - z x_N) + zN = b - zN + zN = b \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} W^T y + zd &= W^T x_b - z W^T x_N + zd = W^T x_b + \left( \frac{c - W^T x_b}{d - W^T x_N} \right) (d - W^T x_N) \\ &= W^T x_b + c - W^T x_b = c \quad \checkmark \end{aligned}$$

(B)

(A) Veamos la factorización LU de B:

$$B = L_B U_B = \begin{pmatrix} \tilde{L} & 0 \\ f^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U} & c \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{L}\tilde{U} & \tilde{L}c \\ f^T\tilde{U} & f^Tc + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & N \\ W^T & d \end{pmatrix}$$

H<sub>2</sub>

Como A es invertible sabemos  $\tilde{L}$  y  $\tilde{U}$  provienen de la factorización LU de A y son únicos. Entonces:

$$U = \begin{cases} c = \tilde{L}^T N \\ f = \tilde{U}^T W \\ u = d - W^T \tilde{U}^{-1} \tilde{L}^{-1} N \end{cases}$$

Notemos:

$$u = d - W^T (\tilde{L}\tilde{U})^{-1} N = d - W^T A^{-1} N = d - W^T x_N$$

si  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ?

Lo Para que B sea invertible  $L_B$  y  $U_B$  deben serlo, y si  $u=0$  entonces la última fila de  $U_B$  es 0 y no es invertible. Así que,  $u \neq 0$  y entonces  $d - W^T x_N \neq 0$ .

FEDERICO YULITA

FEDERICO YULITA  
351/17

①

2) (A) Tomemos  $X, Y \in \mathbb{R}^n / v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ . Notemos:

$$\begin{aligned} v^T \begin{pmatrix} aI & aP \\ -aP^T & aI \end{pmatrix} v &= (x^T \ y^T) \begin{pmatrix} aI & aP \\ -aP^T & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax^T - ay^T P^T \quad ax^T P + ay^T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= ax^T x - ay^T P^T x + ax^T P y + ay^T y \\ &= a(\|x\|_2^2 - (x^T P x)^T + x^T P y + \|y\|_2^2) \\ &= a(\underbrace{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2}_{>0}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

A. Entonces, es necesario que  $a > 0$  para que sea definida positiva.  $\checkmark$

B. Consideremos:

$$\textcircled{B} \quad a = -1, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \leq 0 \quad \checkmark$$

$H_2$  (B) Notemos que  $A^T A = \|u\|_2^2 u u^T$ . Entonces:

$$v^T B(t) v = v^T ((1-t)I + t\|u\|_2^2 u u^T) v = \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \underbrace{\|v\|_2^2}_{\geq 0} + t \underbrace{\|u\|_2^2}_{\geq 0} \underbrace{(u^T v)^2}_{\geq 0} \quad \checkmark$$

$H_2$  Sin embargo, notemos que si  $t=1$  y  $u^T v = 0$  entonces la matriz no es definida positiva. Consideremos:

$$U: \quad t=1, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \leq 0 \quad \checkmark$$



3) (A) Demostrémoslo por inducción. Notemos que  $H_1^t = (1)$  así que  $H_1 H_1^t = (1)(1) = (1) = I_1$ . Veamos ahora para  $H_{2n}$  asumiendo que  $H_n$  es ortogonal.

$$H_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix} \Rightarrow H_{2n}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_n^t & H_n^t \\ H_n^t & -H_n^t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_{2n} H_{2n}^t &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_n^t & H_n^t \\ H_n^t & -H_n^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2H_n H_n^t & H_n H_n^t - H_n H_n^t \\ H_n H_n^t - H_n H_n^t & 2H_n H_n^t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n} \end{aligned}$$

Análogamente se prueba lo mismo para  $H_{2n}^t H_{2n}$ . Por lo tanto,  $H_n$  es ortogonal para todo  $n$  potencia de 2.

(B) Notemos que  $H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Entonces:

$$H_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Está rotando, pero no en la misma dirección. No puede escribirse como  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  así que no es una rotación de Givens.

Sin embargo, notemos que es una reflexión de Householder:

$$U = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_2 U = -U$$

Son iguales?

$$H_2 V = V$$

Lo saqué usando que  $V \in \text{Nu}(H_2 - I)$  y  $U^\perp \perp V$ .

$H_2 = I$   $(I - H_2) v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ 0 & (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)-1 \end{pmatrix} \textcircled{2}$   
 $= \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$

$\therefore (\sqrt{2}-1)v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

OK

justifican  
mejor!!

respects de quí recta refleja?